

Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea IV

Analiza de corelație

Motivație 1

De ce alte metode pe lângă de analiza în domeniul timp?

Analiza în domeniul timp a răspunsurilor la treaptă și impuls:

- Se poate aplica doar pentru câteva valori ale ordinului sistemului
- Trebuie de obicei efectuată (semi-)manual
- Produce un model imprecis, euristic al sistemului

Metodele de identificare pe care le vom discuta mai departe:

- Funcționează pentru orice ordin al sistemului
- Furnizează algoritmi automați, complet implementabili
- Garantează acuratețea soluției (în anumite condiții tehnice)

Motivație 2

De ce analiza de corelație?

- Cea mai apropiată de analiza în domeniul timp (modelul este răspunsul la impuls)
- Model “cu adevărat” neparametric
- O metodă “simplă” din rândul tehnicilor generale de identificare

Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

- 1 Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- 2 **Modele neparametrice**: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

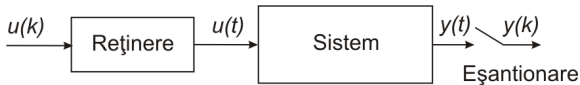
- 1 Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- 2 **Modele cutie neagră**: complet necunoscute în avans
- 3 Modele cutie gri: parțial cunoscute

Analiza de corelație este o metodă cu adevărat neparametrică;
produce un *model sub formă de răspuns la impuls*.

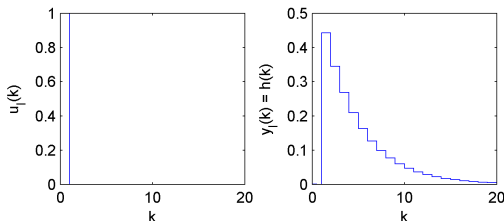
Conținut

- 1 Metoda ideală a analizei de corelație
- 2 Un algoritm practic. Modelul FIR
- 3 Exemplu Matlab
- 4 Garanție de acuratețe (simplificată)

Reamintim: model în timp discret



Răspunsul discret la impuls



Semnal impuls unitar în timp discret:

$$u_I(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

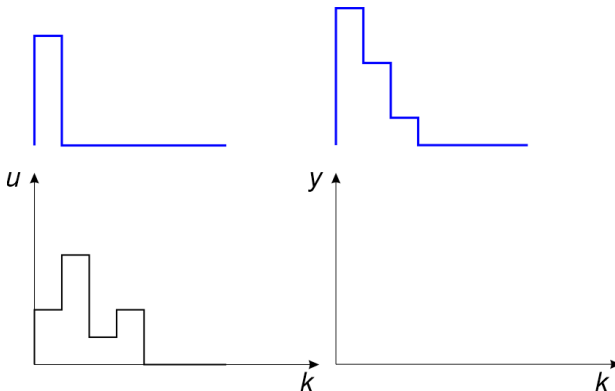
(nu are aria 1, fiind așadar diferit de realizarea în timp discret a impulsului continuu!)

Răspuns discret la impuls:

$$y_I(k) = h(k), \quad k \geq 0$$

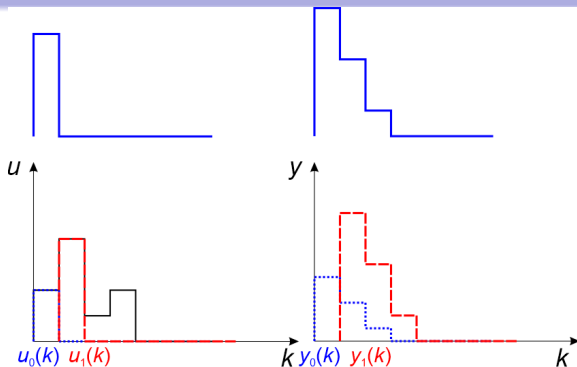
$h(k), k \geq 0$ se numește și **funcția pondere** a sistemului.

Model răspuns la impuls: Problemă



Se dă o intrare în timp discret $u(k)$. Obiectivul este găsirea ieșirii rezultante $y(k)$.

Model răspuns la impuls: Descompunerea intrării



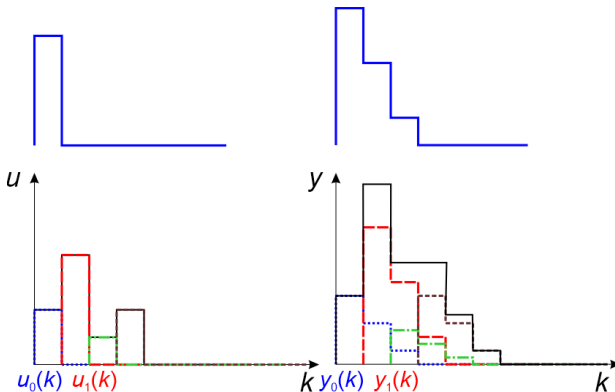
Luăm semnalul $\tilde{u}_j(k)$ egal $u(j)$ at $k = j$, și 0 în rest; $\tilde{u}_j(k)$ este o versiune deplasată și scalată a impulsului unitar:

$$\tilde{u}_j(k) = u(j)u_1(k - j)$$

Răspunsul la $\tilde{u}_j(k)$ este așadar o versiune deplasată și scalată a răspunsului la impuls:

$$\tilde{y}_j(k) = u(j)h(k - j)$$

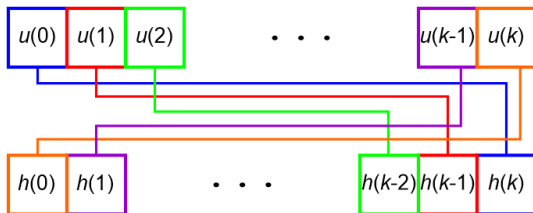
Model răspuns la impuls: Superpoziție



Dar $u(k)$ = superpoziția mai multor semnale $\tilde{u}_j$, și datorită liniarității:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^k u(j)h(k-j)$$

Model răspuns la impuls: Convoluție



$$y(k) = \sum_{j=0}^k \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^k u(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^k h(j)u(k-j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j)$$

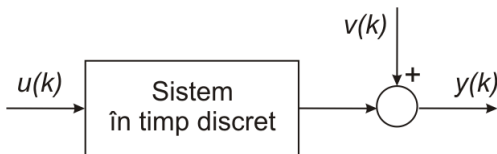
unde am presupus condiții inițiale zero, i.e. $u(j) = 0 \forall j < 0$.

Model de tip răspuns la impuls

Răspunsul la o intrare arbitrară $u(k)$ este *convoluția* intrării cu răspunsul discret la impuls:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + v(k)$$

unde am inclus pe lângă modelul ideal și o componentă de perturbație $v(k)$.



Ipoteze

Ipoteze

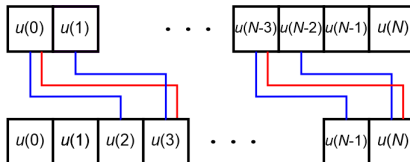
- 1 Intrarea $u(k)$ este un proces stohastic staționar.
- 2 Intrarea $u(k)$ și perturbația $v(k)$ sunt independente.

Reamintim:

- Independența variabilelor aleatoare.
- Proces stohastic staționar: aceeași medie la orice moment de timp, covarianța depinde doar de diferența între pașii de timp.

Funcția de covarianță a intrării

$$r_u(\tau) = r_u(-\tau) = E \{u(k + \tau)u(k)\} \left(= \frac{1}{\#} \sum_k u(k + \tau)u(k) \right)$$



De exemplu:

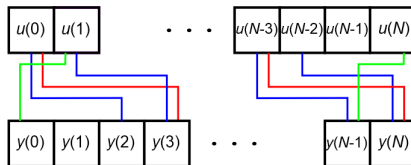
$$r_u(2) = r_u(-2) = E \{u(k + 2)u(k)\}$$

$$r_u(3) = r_u(-3) = E \{u(k + 3)u(k)\}$$

Observație: r_u este simetrică.

Funcția de covarianță intrare-ieșire

$$r_{yu}(\tau) = E \{y(k + \tau)u(k)\} \left(= \frac{1}{\#} \sum_k y(k + \tau)u(k) \right)$$



De exemplu:

$$r_{yu}(2) = E \{y(k + 2)u(k)\} = \frac{1}{\#} \sum_k y(k + 2)u(k)$$

$$r_{yu}(3) = E \{y(k + 3)u(k)\}$$

$$r_{yu}(-1) = E \{y(k - 1)u(k)\} = E \{y(k)u(k + 1)\}$$

Observație: r_{yu} , r_u sunt covarianțele adevărate doar dacă intrarea și ieșirea sunt de medie zero. Dacă această condiție nu este satisfăcută, mediile nonzero trebuie eliminate din semnale.

Relația între covarianțe și răspunsul la impuls

Dacă nu ar exista perturbații, atunci:

$$\begin{aligned} r_{yu}(\tau) &= E \{ y(k + \tau) u(k) \} \\ &= E \left\{ \left[\sum_{j=0}^{\infty} h(j) u(k + \tau - j) \right] u(k) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j) E \{ u(k + \tau - j) u(k) \} = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(\tau - j) \end{aligned}$$

Erorile generate de perturbații sunt tratate implicit mai târziu, folosind regresia liniară.

Identificarea răspunsului la impuls

Scriem ecuația covarianțelor pentru toate valorile τ :

$$r_{yu}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(-j) = h(0)r_u(0) + h(1)r_u(-1) + h(2)r_u(-2) + \dots$$

$$r_{yu}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(1-j) = h(0)r_u(1) + h(1)r_u(0) + h(2)r_u(-1) + \dots$$

...

obținând (în principiu) un sistem infinit de ecuații liniare:

- Coeficienții sunt $r_u(\tau)$, $r_{yu}(\tau)$.
- Necunoscutele sunt $h(0)$, $h(1)$, $\dots$: soluția sistemului.

Structura sistemului liniar

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(-j) = h(0)r_u(\tau) + h(1)r_u(\tau-1) + h(2)r_u(\tau-2) + \dots$$

$$\begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) \end{bmatrix} \quad \dots$$

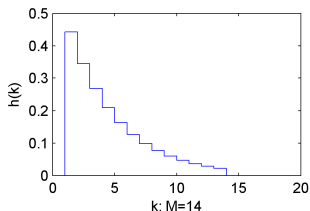
$$\begin{bmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ r_{yu}(2) \\ r_{yu}(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \dots & & & \\ r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \dots & & \\ r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \dots & \\ r_u(3) & r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Urmează un algoritm practic, ce folosește un set finit de date.

Conținut

- 1 Metoda ideală a analizei de corelație
- 2 Un algoritm practic. Modelul FIR
- 3 Exemplu Matlab
- 4 Garanție de acuratețe (simplificată)

Modelul răspuns finit la impuls



Impunem condiția $h(k) = 0$ pentru $k \geq M$. Obținem modelul de tip **răspuns finit la impuls** (en. *finite impulse response*, FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

De notat: M trebuie selectat pentru a avea $MT_s \gg$ constantele de timp dominante (sistemul să fie aproape în regim staționar)

Obținerea covarianțelor din date: r_u

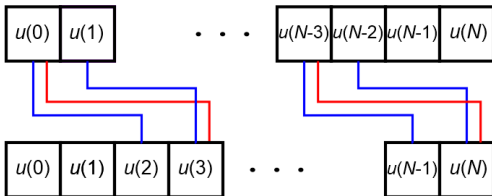
Se dau semnalele $u(k)$, $y(k)$, unde $k = 0, \dots, N$.
Pentru valori pozitive τ , avem:

$$r_u(\tau) = E \{u(k + \tau)u(k)\}$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-\tau} u(k + \tau)u(k)$$

$$=: \hat{r}_u(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

și $\hat{r}_u(-\tau) = \hat{r}_u(\tau)$ datorită simetriei.



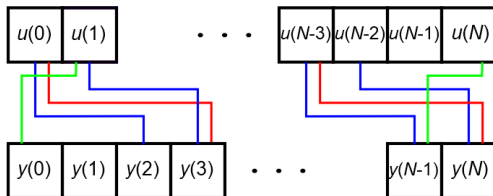
Obținerea covarianțelor din date: r_{yu}

Pentru valori τ pozitive și negative:

$$r_{yu}(\tau) = E \{y(k + \tau)u(k)\}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-\tau} y(k + \tau)u(k) & \text{dacă } \tau \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=-\tau}^N y(k + \tau)u(k) & \text{dacă } \tau < 0 \end{cases}$$

$$=: \hat{r}_{yu}(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$



Modelul răspuns finit la impuls

Model FIR:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

Ecuția covarianțelor este trunchiată în același fel:

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)r_u(\tau-j)$$

Sistem liniar de ecuații

Folosind $\hat{r}_{yu}$, $\hat{r}_u$ estimate din date, scriem ecuațiile trunchiate pentru $\tau = 0, \dots, T-1$ (ținând cont că $\hat{r}_u(-\tau) = \hat{r}_u(\tau)$):

$$\begin{aligned}\hat{r}_{yu}(0) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(-j) \\ &= h(0)\hat{r}_u(0) + h(1)\hat{r}_u(1) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(M-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_{yu}(1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(1-j) \\ &= h(0)\hat{r}_u(1) + h(1)\hat{r}_u(0) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(M-2)\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}\hat{r}_{yu}(T-1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(T-1-j) \\ &= h(0)\hat{r}_u(T-1) + h(1)\hat{r}_u(T-2) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(T-M)\end{aligned}$$

– un sistem liniar de T ecuații cu M necunoscute $h(0), \dots, h(M-1)$.

Sistem liniar: formă matriceală

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) & \hat{r}_u(1) & \dots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & \hat{r}_u(0) & \dots & \hat{r}_u(M-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_u(T-1) & \hat{r}_u(T-2) & \dots & \hat{r}_u(T-M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_u(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_u(3) \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \hat{r}_u(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \hat{r}_{yu}(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(3) \end{bmatrix} & \dots & & & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(M-1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(3) \end{bmatrix} & \dots & & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(M-2) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{r}_u(2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(2) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(3) \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \hat{r}_u(M-3) \end{bmatrix} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \hat{r}_u(T-1) & \hat{r}_u(T-2) & \dots & & & & & \hat{r}_u(T-M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

Sistem liniar: Observații

Selecția naivă $T = M$ ar furniza o soluție exactă a sistemului, dar datorită zgomotului și perturbațiilor această soluție ar fi supra-antrenată. Este așadar necesar să avem $T > M$ (preferabil, $T \gg M$).

Putem acum aplica metodologia de regresie liniară (vezi Partea 3) pentru a rezolva problema.

Utilizarea modelului FIR

După ce sistemul a fost rezolvat obținând ponderile estimate $\hat{h}$, prezicem ieșirea cu:

$$\hat{y}(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{h}(j)u(k-j)$$

Caz special: Intrare de tip zgomot alb

Considerăm cazul în care intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Atunci, $r_u(\tau) = 0$ pentru orice $\tau \neq 0$ (zgomotul alb fiind necorelat), iar $r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau - j)$ se reduce la:

$$r_{yu}(\tau) = h(\tau)r_u(0)$$

Rezultă algoritmul foarte simplu:

$$h(\tau) = \frac{\hat{r}_{yu}(\tau)}{\hat{r}_u(0)}$$

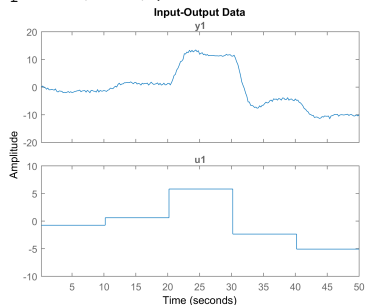
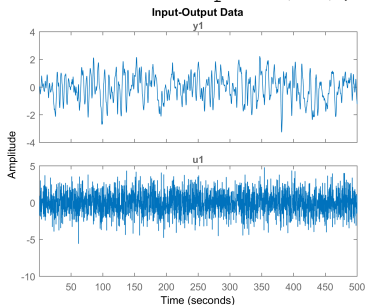
Conținut

- 1 Metoda ideală a analizei de corelație
- 2 Un algoritm practic. Modelul FIR
- 3 Exemplu Matlab**
- 4 Garanție de acuratețe (simplificată)

Date experimentale

Se dau următoarele seturi de date, separate pentru identificare și validare.

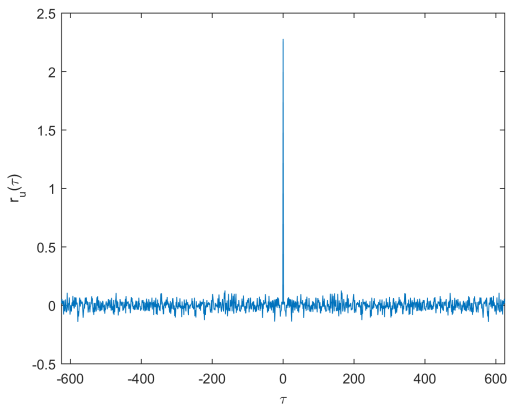
`plot(id); and plot(val);`



De notat că intrarea de identificare este zgomot alb, dar intrarea de validare nu este. Setul de identificare conține 2500 de eșantioane. Observăm că semnalele sunt de medie zero.

Covarianța intrării

```
[c, tau] = xcorr(id.u); and plot(tau, c);
```



Intrarea este zgomot alb.

Aplicarea analizei de corelație

```
fir = cra(id, M, 0); sau fir = cra(id, M, 0, plotlevel);
```

Argumentele funcției:

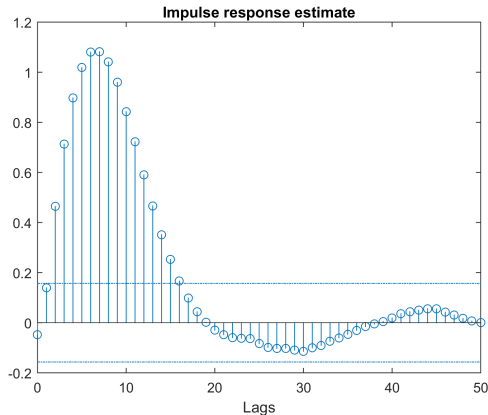
- 1 Datele de identificare.
- 2 Lungimea M a modelului de tip FIR, fixată aici la 45.
- 3 Al treilea argument egal cu 0 înseamnă ca nu se efectuează *albirea intrării*.

Tratarea intrărilor ne-ideale:

- Dacă intrarea nu are medie zero, setul de identificare trebuie trecut prin funcția `detrend` pentru a scădea valorile medii din semnale.
- Dacă intrarea nu este zgomot alb, al treilea argument trebuie lăsat egal cu valoarea implicită (nespecificându-l, sau fixându-l egal cu o matrice vidă), ceea ce va duce la albirea semnalului de intrare.

Aplicarea analizei de corelație (continuare)

Implicit (sau când `plotlevel=1`) parametrii modelului FIR sunt reprezentați grafic împreună cu un interval de încredere de 99%.

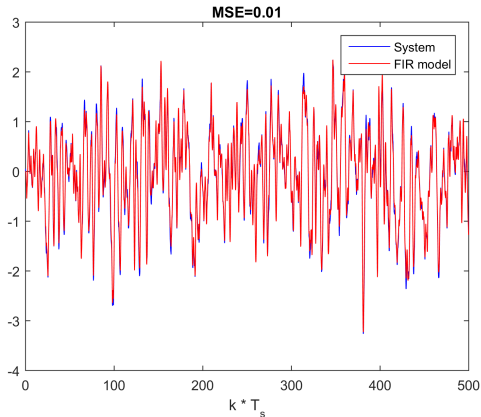


`plotlevel=2` reprezintă grafic de asemenea și funcțiile de covarianță.

Rezultate pe datele de identificare

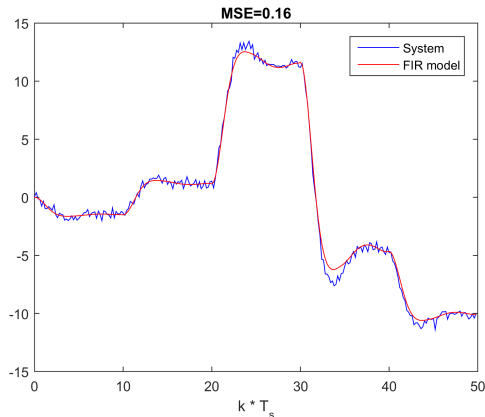
```
yhat = conv(fir, id.u); yhat = yhat(1:length(id.u));
```

Pentru a simula modelul FIR, trebuie efectuată *convoluția* între parametrii FIR și intrare. Ieșirea simulată este mai lungă decât este necesar, și este așadar trunchiată la lungimea corectă.



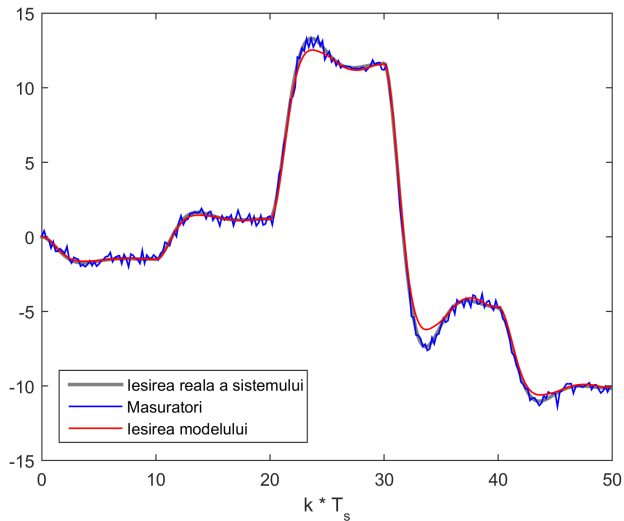
Validarea modelului FIR

```
yhat = conv(fir, val.u); yhat = yhat(1:length(val.u));
```



Rezultatele sunt rezonabile, dar nu excelente.

Detalii despre semnale



Alternativă: funcția `impulseest`

```
model = impulseest(id, M); or model = impulseest(id);
```

Folosește un algoritm mai avansat decât cel studiat la curs.

Conținut

- 1 Metoda ideală a analizei de corelație
- 2 Un algoritm practic. Modelul FIR
- 3 Exemplu Matlab
- 4 Garanție de acuratețe (simplificată)

Garanție simplificată pentru intrare zgomot alb

Ipoteză adițională

- 1 Intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Teoremă

Pentru intrare de tip zgomot alb, valorile estimate $\hat{h}(\tau)$ converg la valorile reale $h(\tau)$ când numărul de eșantioane N tinde la infinit.

Observație: Acest tip de rezultat, în care soluția corectă este obținută la limita numărului infinit de date, se numește *consistență*.

Rezumat

- Semnalul impuls unitar în timp discret, și răspunsul discret la impuls h .
- Utilizarea răspunsului la impuls ca model: convoluție cu intrarea u .
- Cazul ideal: Funcțiile de covarianță și sistemul liniar de ecuații în h .
- Analiza de corelație în practică:
 - covarianțe din date finite
 - răspunsul finit la impuls (FIR)
 - sistem de ecuații finit-dimensional
- Exemplu Matlab.
- Garanție de acuratețe simplificată (consistență în limita datelor infinite).