

Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea III

Analiza răspunsurilor la treaptă și impuls

Motivare

În general:

În anumite cazuri un model simplu de ordinul 1 sau 2 este suficient; analiza răspunsurilor la treaptă și impuls este o metodă ușoară de a obține astfel de modele.

Pentru studenți:

Metoda cea mai apropiată de cunoștințele de la teoria sistemelor
⇒ o tranziție mai ușoară către alte metode.

Clasificare

Reamintim **Taxonomia modelelor matematice** din Partea I:

După numărul de parametri:

- ① **Modele parametrice**: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- ② **Modele neparametrice**: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

- ① Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- ② Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
- ③ **Modele cutie gri**: parțial cunoscute

Clasificare (continuare)

La pașii la care studiem graficul în sine, răspunsurile la treaptă și impuls pot fi interpretate ca **modele neparametrice**: sunt funcții de timp continuu care, în general, nu pot fi reprezentate printr-un număr finit de parametri.

Pe baza graficului însă, vom determina în final o funcție de transfer – un **model parametric**.

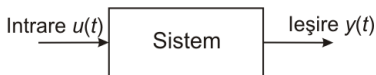
Model de tip **cutie gri**.

Studiul răspunsurilor la treaptă și impuls se numește *analiza în domeniul timp*.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Definiție sistem liniar

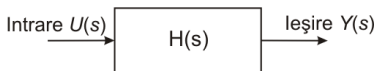


Un sistem este *liniar* dacă satisface principiile de:

Superpoziție: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u_1(t)$ cu ieșirea $y_1(t)$; și la $u_2(t)$ cu $y_2(t)$; atunci la intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ va răspunde cu ieșirea $y_1(t) + y_2(t)$.

Omogeneitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieșirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.

Reprezentarea prin funcții de transfer



Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n$$

unde $U(s)$ și $Y(s)$ sunt, respectiv, transformatele Laplace ale semnalelor de intrare și ieșire în domeniul timp $u(t)$, $y(t)$.
(Important: în condiții inițiale nule.)

Transformata Laplace a unui semnal $f(t)$ este:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformata Laplace: discuție

- s se numește argument *complex* (este un număr complex), iar transformata Laplace efectuează trecerea a unei funcții din domeniul timp t în domeniul complex s .
- Avantajul este că multe operații aplicate uzual în inginerie (derivare, integrare etc.) devin mult mai simple în domeniul s .

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

- K este factorul de proporționalitate (= 1 în exemplu)
- T este constanta de timp (= CR în exemplu)

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - **Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Semnalul treaptă ideal



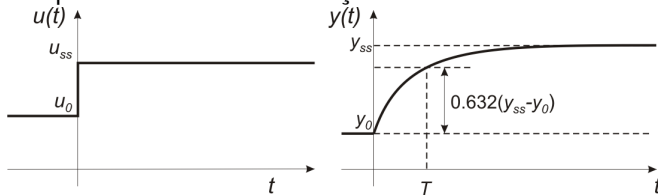
$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- 1 Citește ieșirea în regim staționar. Factorul de proporționalitate K este egal cu această ieșire.
- 2 Găsește valoarea timpului la care ieșirea atinge 0.632 din valoarea staționară. Aceasta este constanta de timp T .

Condiții inițiale nenule

În practică, adeseori semnalul treaptă ideal nu poate fi folosit, fiindcă sistemul trebuie menținut în jurul unui punct de funcționare sigur/profitabil. Vom presupune că înaintea experimentului sistemul era în regim staționar la ieșirea y_0 cu intrarea constantă u_0 .

Realizarea practică a treptei este adesea un semnal rectangular ca în figură. Răspunsul sistemului este aşadar non-ideal.



Dar sistemul este liniar! Noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$ unde $u_S(t)$ este treapta ideală. Așadar, dacă notăm răspunsul la treaptă ideal cu $y_S(t)$, avem noua ieșire:

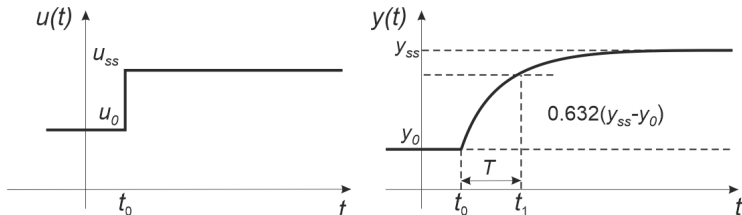
$$y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$$

adică o simplă translație și scalare a semnalului ideal.

$$y_{ss} = y_0 + (u_{ss} - u_0)K$$

$$y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0)$$

Algoritm general

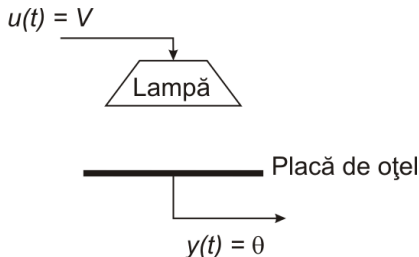


Algoritm general

- 1 Citește u_0 , y_0 , u_{ss} , y_{ss} , valorile inițiale și în regim staționar ale intrării și ieșirii. Calculează $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.
- 2 Citește timpul t_0 unde are loc treapta, și t_1 unde ieșirea urcă la 0.632 din diferență. Calculează $T = t_1 - t_0$.

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Sistem termic



Considerăm sistemul termic din figură (diferit de exemplul anterior). Intrarea este voltajul V aplicat lămpii, iar ieșirea este temperatura θ citită de un termocuplu montat pe spatele plăcii de oțel.

Perioada de eşantionare

Definiție: Perioada de eşantionare T_s este intervalul de timp continuu dintre două momente succesive de eşantionare (a semnalelor de intrare, de ieşire sau a altor semnale din sistem).

Nu confundați perioada de eşantionare T_s cu constanta de timp T înmulțită cu argumentul complex s !

Mai departe, $y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0) \approx 169$, și identificând acest punct pe grafic obținem $T \approx 60$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 2: Forma generală

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate ($= \frac{1}{k}$ în exemplu)
- ξ este factorul de amortizare ($= 0$ în exemplu)
- ω_n este pulsația naturală ($= \sqrt{k/m}$ în exemplu)

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - **Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

The graph shows the amplitude response of a second-order system over time. The x-axis is labeled 'Time (sec)' and ranges from 0 to 10. The y-axis is labeled 'Amplitude' and ranges from 0 to 1. The curve starts at the origin (0,0) and rises smoothly, approaching an amplitude of 1.0. The curve passes through the point (2, 0.5) and (4, 0.866), which are marked with horizontal dashed lines extending to the y-axis.

Răspuns la treaptă de ordinul 2 subamortizat

Ne ocupăm în principal de cazul subamortizat, $\xi \in (0, 1)$



Rezolvând pentru $y(t)$ obținem:

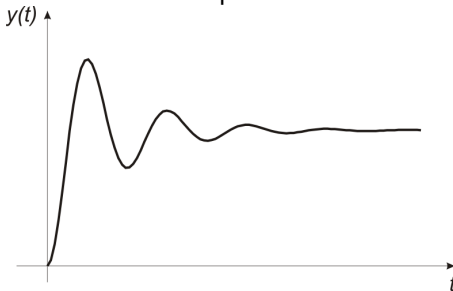
$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos \xi) \right]$$

The plot shows the system response $y(t)$ over time t . The response starts at the origin, rises to a peak of $(1+M)$ at t_1 , crosses the steady-state value K at t_2 , reaches a minimum of $1-M$ at t_3 , and then oscillates with decreasing amplitude around the steady-state value K . The period T_0 is the time interval between the first peak and the first undershoot.

$$y(t_m) = K[1 + (-1)^{m+1} M^m], \text{ unde suprareglajul } M = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

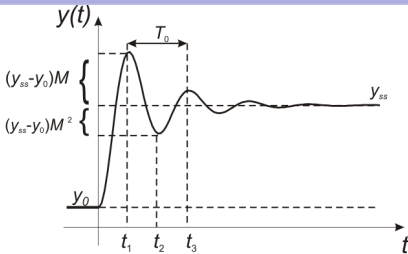
Pornirea de la răspuns la treaptă

Considerăm acum că este dat răspunsul unui sistem necunoscut.

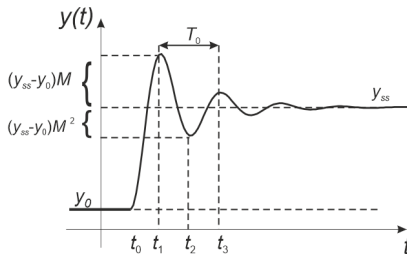
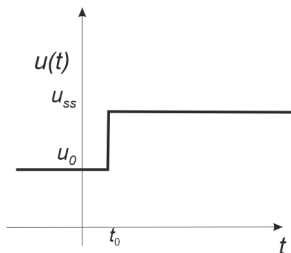


Folosind elementele de mai sus, vom afla o funcție de transfer aproximată a sistemului.

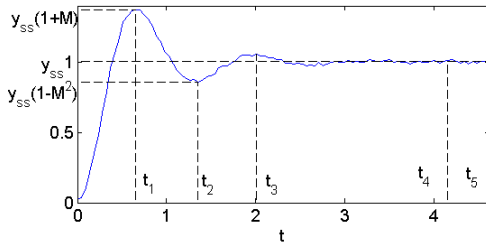
9



© 2006 The Authors
Journal compilation © 2006 Blackwell Publishing Ltd



Ca și pentru ordinul 1, translatăm axa orizontală cu timpul de start t_0 al treptei. Nu există nici un impact asupra algoritmului, fiindcă se folosesc oricum timpi relativi pentru calculul perioadei de oscilație.



- 1 Factor de proporționalitate $K = \frac{y_{ss}-y_0}{u_{ss}-u_0} = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \approx 0.25$.
- 2 Suprareglaj $M = \frac{y(t_1)-y_{ss}}{y_{ss}-y_0} = \frac{y(t_1)-y_{ss}}{y_{ss}} \approx 0.36$.
- 3 Factor de amortizare $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}} \approx 0.31$.
- 4 Perioada $T_0 = t_3 - t_1 \approx 1.31$, ducând la pulsația naturală $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.05$.

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

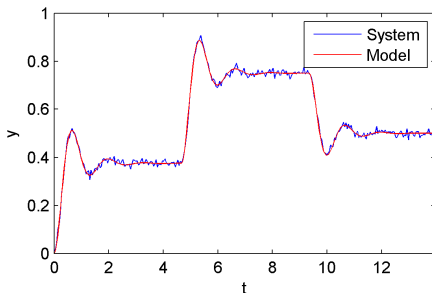
$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

$$\hat{\omega}_n = 5.05$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_ns + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.38}{s^2 + 3.09s + 25.51}$$

Exemplu: Validare



Calitatea modelului este foarte bună (ceea ce nu este surprinzător, datele fiind generate în simulare).

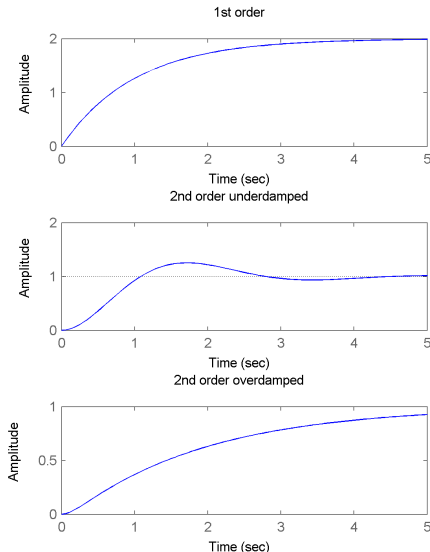
Eroarea medie pătratică (MSE):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2 \approx 9.66 \cdot 10^{-5}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale**
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

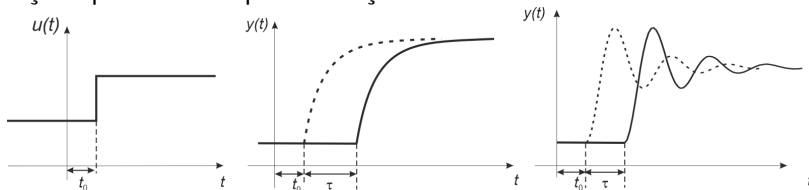
Alegerea ordinului



Chiar dacă este critic sau supraamortizat, la $t = 0$ răspunsul unui sistem de ordinul 2 va avea derivata egală cu 0: va fi **tangent la axa timpului**. În schimb, panta tangentei este de K/T pentru sistemele de ordinul 1.

Timp mort

Răspunsul unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu timp mort τ** are aceeași formă ca și mai sus, dar după ce intrarea se schimbă, există o întârziere τ înainte ca efectul să se propage la ieșire. A nu se confunda cu timpul potențial nenul t_0 de aplicare a semnalului treaptă! Timpul mort τ este intervalul de *după* t_0 de care are nevoie ieșirea pentru a începe să reacționeze.



Timpul mort este reprezentat în funcția de transfer după cum urmează:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.

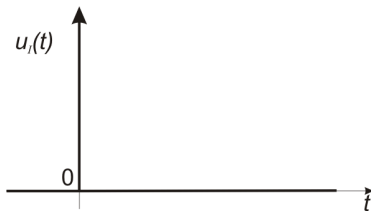
Rezumat răspuns la treaptă

- Factor de proporționalitate K : diferența dintre nivelurile la ieșire / diferența dintre nivelurile la intrare.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 63.2% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat din maxime și minime. Rezultă ξ, ω_n .
- Inspecție grafic + eroare medie pătratică utilizată pentru validarea modelelor.
- Mediere eșantioane pentru zgomot în valorile inițiale / staționare.
- Timpul inițial diferit de zero și întârzierile tratate prin translatarea corespunzătoare a valorilor de timp; întârziererea intră în funcția de transfer.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Intrarea impuls ideală



Impulsul ideal este funcția delta a lui Dirac. O definiție informală:

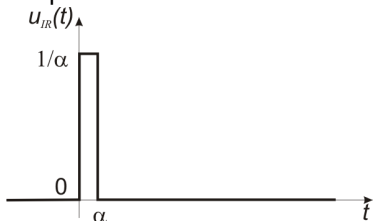
$$u_I(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

cu o condiție suplimentară: $\int_{-\infty}^{\infty} u_I(t) dt = 1$.

(De fapt, impulsul ideal nu este o funcție, ci o așa-numită distribuție.)

Realizarea practică a impulsului

În realitate, evident nu putem crea semnale de amplitudine infinită. Impulsul este așadar aproximat de către un semnal rectangular:



$$u_{IR}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & t \in [0, \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

unde $\alpha \ll$ (mult mai mic decât constantele de timp ale sistemului).

De notat că dreptunghiul are aria 1, $\int_{-\infty}^{\infty} u_{IR}(t) dt = 1$.

Această aproximare introduce diferențe (erori) față de răspunsul real la impuls, dar pentru α mic eroarea este acceptabilă. Vom dezvolta analiza în cazul ideal, dar exemplele folosesc realizarea practică.

O proprietate utilă a răspunsului la impuls

În domeniul complex:

$$\text{treapta } U_S(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{impulsul } U_I(s) = 1$$

Reamintim că răspunsul în domeniul timp al unui sistem se poate scrie: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, iar $Y(s) = H(s)U(s)$.

Deci:

$$\begin{aligned} Y_S(s) &= \frac{1}{s} Y_I(s), & Y_I(s) &= s Y_S(s) \\ y_S(t) &= \int_0^t y_I(\tau) d\tau, & y_I(t) &= \dot{y}_S(t) \end{aligned}$$

Răspunsul la impuls este *derivata răspunsului la treaptă*.

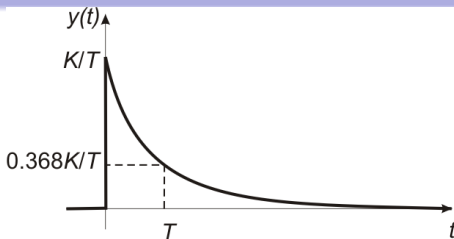
Reamintim: Sistem de ordinul 1

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate
- T este constanta de timp

Răspunsul la impuls de ordinul 1 ideal



Folosind relația cu răspunsul la treaptă, și derivata acestui răspuns pe care am calculat-o deja, avem direct răspunsul la impuls:

$$y_I(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

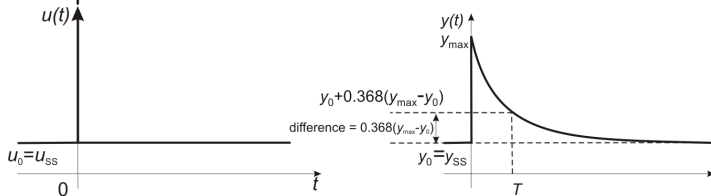
de unde rezultă:

$$\begin{cases} y_I(0) = \frac{K}{T} = y_{\max} \\ y_I(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = y_{\max} e^{-1} \approx 0.368 y_{\max} \end{cases}$$

De notat: $y_1(4T) = 0.0183y_{\max}$, ieșirea este aproximativ staționară după $4T$.

Determinarea parametrilor

Considerăm acum că este dat răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut. Vom folosi acest răspuns pentru a găsi o funcție de transfer aproximată.

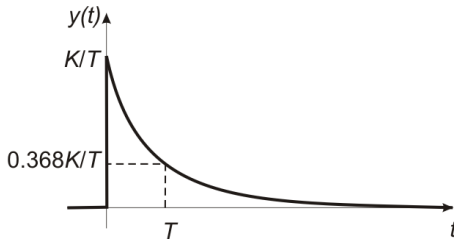


Presupunem întâi condiții inițiale nenule fiindcă sunt favorabile: oferă o metodă robustă de a estima factorul de proporționalitate K .

Algorithm

- 1 Citește ieșirea staționară (sau inițială) $y_{ss} = y_0$, la fel și intrarea $u_{ss} = u_0$. Apoi, $K = y_{ss}/u_{ss}$.
- 2 Citește $y_{\max}$ și citește constanta de timp T la momentul în care ieșirea descrește la 0.368 din diferența $y_{\max} - y_0$.

Determinarea parametrilor în condiții inițiale nule



Putem estima factorul de proporționalitate folosind $y_{\max} = \frac{K}{T}$, dar în practică această metodă nu este la fel de precisă, datorită zgomotului și a caracterului non-ideal al impulsului.

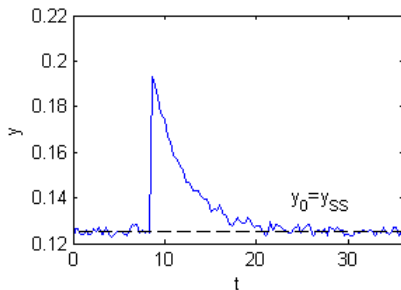
Algorithm

- 1 Citește $y_{\max}$ și determină timpul la care ieșirea descrește la 0.368 din $y_{\max}$. Aceasta este constanta de timp T .
- 2 Calculează $K = y_{\max} T$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Model și parametri



Folosim graficul pentru a estima funcția de transfer. Avem

$$u_0 = u_{ss} = 0.5.$$

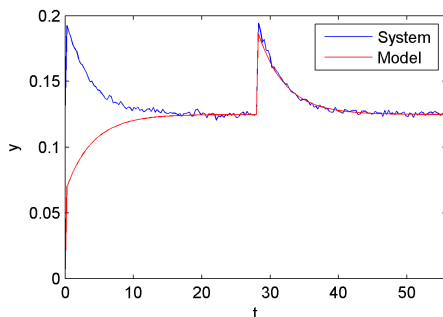
Găsim ieșirea staționară (egală cu cea inițială) efectuând media câtorva eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.13$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{0.25}{3.92s + 1}$$

Exemplu: Validare

Comparăm datele de la sistem cu răspunsul modelului la intrarea de validare (impulsurile 2 și 3):



Simularea nu ia în considerare condițiile inițiale nenule ale sistemului, și de aceea partea inițială are diferențe mari.

Vom prezenta o metodă de simulare din condiții inițiale nenule, care funcționează nu doar pentru impulsuri, ci pentru *orice* semnal de intrare (treaptă, etc.).

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul n

Un **model în spațiul stărilor**, în timp continuu, reprezintă un sistem liniar sub forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

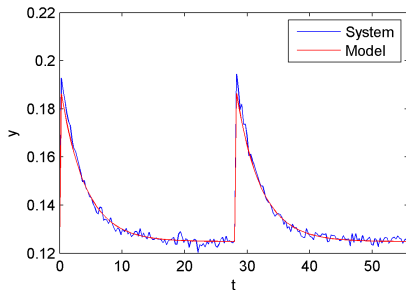
unde:

- x este vectorul de stare, $x \in \mathbb{R}^n$ cu n ordinul sistemului
- u și y sunt intrarea și ieșirea obișnuite. Pot fi vectori dacă sistemul are mai multe intrări sau ieșiri, dar aici semnale scalare sunt suficiente.
- Matricile A de stare, B de intrare, C de ieșire, D de transfer direct. Acestea au dimensiunile potrivite, aici: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vector datorită intrării scalare), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vector datorită ieșirii scalare), $D \in \mathbb{R}$ (un scalar, de obicei 0).

Figure 1

Exemplu: Validare din condiția inițială corectă

Pentru a lua condiția inițială în considerare, inițializăm $x(0) = y_0$ la începutul simulării.



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 3.74 \cdot 10^{-6}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale

Reamintim: Sistem de ordinul 2

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

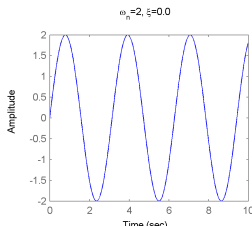
unde:

- K este factorul de proporționalitate
- ξ este factorul de amortizare
- ω_n este pulsația naturală

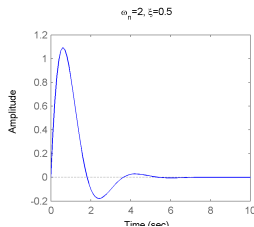
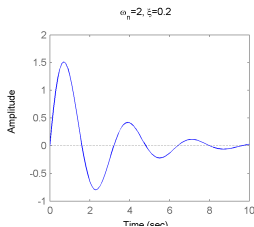
Forme tipice ale răspunsului la impuls de ordinul 2

Ca și la treaptă, factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului

$\xi = 0$, neamortizat

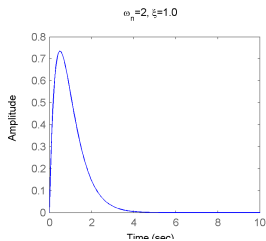


$\xi \in (0, 1)$, **subamortizat** – ne vom concentra pe acest caz

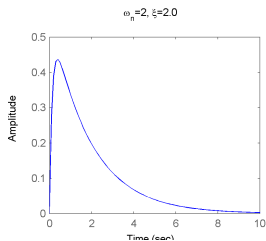


Forme tipice (continuaire)

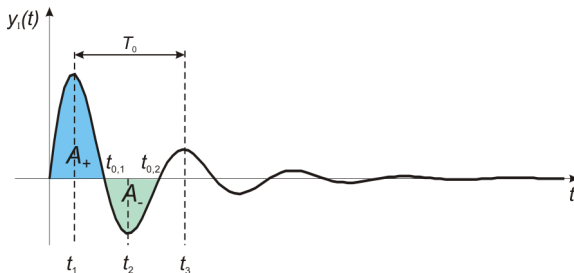
$\xi = 1$, critic amortizat



$\xi > 1$, supraamortizat



Răspunsul la impuls subamortizat



Folosind derivata răspunsului la treaptă calculată mai sus, avem răspunsul la impuls:

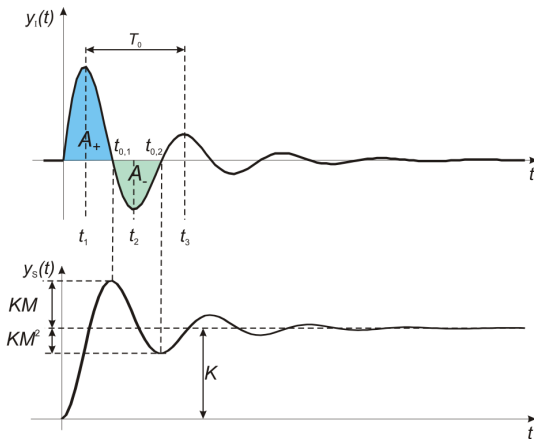
$$y_I(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$

Observăm deja că perioada este neschimbată, deci $T_0 = t_3 - t_1 = 2(t_2 - t_1)$.

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} y_1(\tau) d\tau = y_S(t_{0,1}) = K + KM, \quad A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} y_1(\tau) d\tau =$$

$$= -[y_S(t_{0,2}) - y_S(t_{0,1})] = -[K - KM^2 - (K + KM)] = KM^2 + KM$$

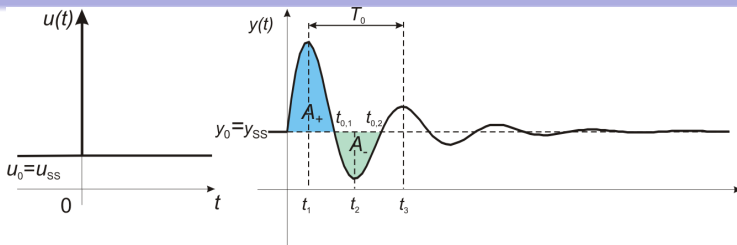
Răspunsul la impuls subamortizat: suprareglaj



Obtinem aşadar:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{KM^2 + KM}{K + KM} = M$$

Răspunsul la imp. subamort.: Condiții inițiale nenule



În condiții inițiale nenule, impulsul este translatat, $u(t) = u_0 + u_1(t)$, ducând la $y(t) = y_0 + y_1(t)$. De notat că $u_0 = u_{ss}$, $y_0 = y_{ss}$.

Din valorile staționare estimăm **factorul de proporționalitate**: $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$. Perioada T_0 nu se schimbă, dar ariile trebuie găsite **relativ la ieșirea staționară**:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau = K + KM$$

$$A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y(\tau) - y_0) d\tau = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau = KM^2 + KM$$

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(t) - y_0) dt \approx T_s \sum_{k=0}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0)$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t)) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k))$$

unde $k_{0,1}$, $k_{0,2}$ sunt indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,1}$, $t_{0,2}$.

Determinarea parametrilor

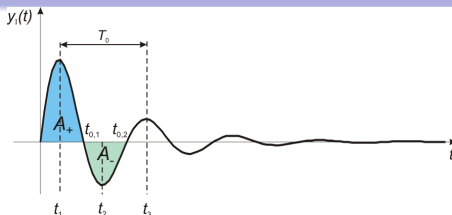
Dat fiind răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut:

Algoritm

- 1 Determină ieșirea și intrarea staționară y_{ss} , u_{ss} . Factorul de proporționalitate este $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$.
- 2 Citește valorile de timp unde $y(t)$ intersectează y_{ss} : $t_{0,1}$, $t_{0,2}$. Calculează ariile $A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau$,
 $A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau$. Găsește suprareglajul $M = \frac{A_-}{A_+}$.
- 3 Factorul de amortizare este $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}}$.
- 4 Citește valorile de timp la maxime, t_1 , t_3 , sau la maxim și minim t_1 , t_2 . Calculează perioada $T_0 = t_3 - t_1$, sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$.
- 5 Pulsația naturală: $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}$.

De notat că relațiile între M , T_0 , ξ , și ω_n sunt valide în general, deci pașii 3 și 5 folosesc aceleași formule ca și pentru treaptă.

Estimarea lui K în condiții inițiale nule



Rezolvăm $\dot{y}(t) = 0$ pentru a obține t_1 pentru primul maxim, și îl înlocuim în $y(t)$ pentru a obține valoarea maximă în sine. Obținem după câteva calcule:

$$y(t_1) = K\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

relație ce poate fi folosită pentru a estima factorul de proporționalitate: $K = \frac{y(t_1)}{\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$. Este nevoie de ξ și ω_n , care pot fi calculate cu metodele de mai sus independent de condiția inițială.

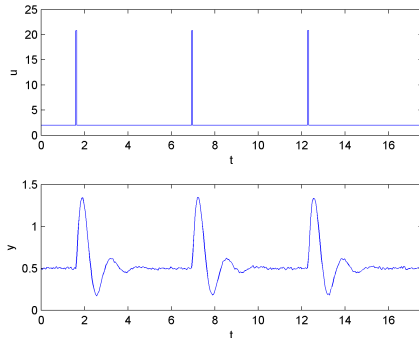
Din aceleași motive ca la ordinul 1, această metodă este mai puțin precisă decât determinarea lui K din valori staționare nenule.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale

Exemplu de ordinul 2

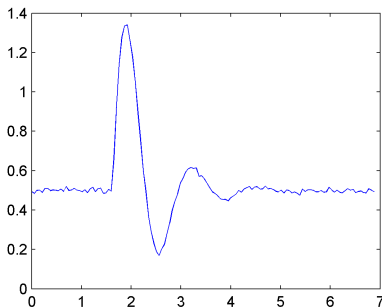
Simulare, 330 de eșantioane cu perioada de eșantionare ≈ 0.053 .



Din nou avem condiții inițiale nenule, și ca de obicei zgomot de măsurare.

Vom folosi primul impuls pentru identificare și celelalte două pentru validare.

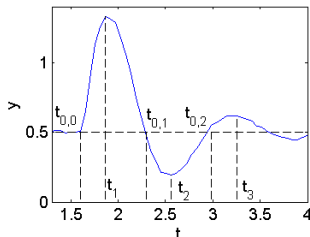
Exemplu: Valori staționare și factor de proporționalitate



Avem $u_0 = u_{ss} = 2$.

Determinăm ieșirea staționară (egală cu cea inițială) prin efectuarea mediei ultimelor 11 eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.5$$

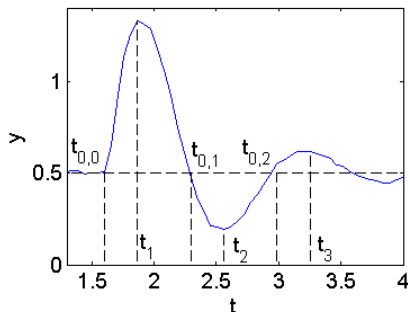


Citim $t_{0,0} \approx 1.6$, $t_{0,1} \approx 2.3$, $t_{0,3} \approx 2.99$. Trebuie ținut cont că impulsul este **aplicat la timpul $t_{0,0} \neq 0$** . Reamintim – ariile sunt estimate numeric:

$$A_+ = \int_{t_{0,0}}^{t_{0,1}} (y(t) - y_0) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,0}}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0) \approx 0.34$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t)) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k)) \approx 0.12$$

unde $k_{0,0}, k_{0,1}, k_{0,2}$ indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,0}, t_{0,1}, t_{0,2}$.



Citim $t_1 \approx 1.92$ și $t_3 \approx 3.2$, ducând la $T_0 = 1.28$. De aici,

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.16.$$

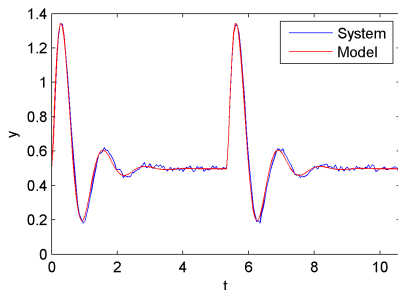
Înapoi la exemplu: Model (aproximat) în spațiul stărilor

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26.68 & -3.22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.64 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0u(t)\end{aligned}$$

unde x este vectorul de stare, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Exemplu: Validare

Pentru a porni din condiția inițială nenulă, inițializăm $x_1(0) = y_0, x_2(0) = 0$ la începutul simulării (pornim din regim staționar, de aceea $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$).



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

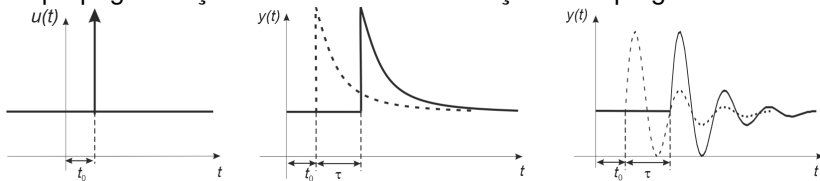
$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - **Remarci adiționale**

Timp mort

Ca și cel la treaptă, răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu timpul mort** τ are forma tipică, dar după schimbarea intrării (care poate surveni la $t_0 \neq 0$) există o întârziere τ până când efectul se propagă la ieșire. Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.



Funcții de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Rezumat răspuns la impuls

- Răspuns la impuls = derivata răspunsului la treaptă.
- Factor de proporționalitate K : ieșire / intrare în condiții inițiale nenule, altfel din valoarea maximă.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 36.8% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat prin integrare numerică. Rezultă ξ, ω_n .
- Model în spațiul stărilor pentru condiții inițiale diferite de zero.